

Τετραγωνικές μορφές

25/5/17

Ορισμός: Έστω $(E, \langle, \rangle)$ Ευκλείδης χώρος διάστασης n . Μια αντιστοι-

χία $q: E \rightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται τετραγωνική μορφή αν υπάρχει ΟΚΒ

$\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ του E και συμμετρικός πίνακας A , έτσι ώστε

$$q(\vec{x}) = \vec{x}^t A \vec{x} \text{ όπου } \vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n \text{ και } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$q(\vec{x}) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad a_{ij} = a_{ji}$$

ο πίνακας της
τετραγωνικής μορφής

από τον πίνακα
βαθμού 2

$q: E \rightarrow \mathbb{R}$ τετραγωνική μορφή

$$q(x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n) = (x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ όπου } A^t = A$$

$$\rightarrow x^2 + 2xy - y^2 = (x \ y) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow x^2 + xy - yz + y^2 - 3z^2 + 7xz = (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 7/2 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \\ 7/2 & -1/2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Άσκηση: Βρείτε την τετραγωνική μορφή $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με $q(x, y, z) =$

$$(x \ y \ z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Λύση: $(x \ y \ z) \begin{pmatrix} x-3z \\ 2y \\ 3x \end{pmatrix} = x^2 - 3zx + 2y^2 - 3xz$

ii) Βρείτε τον πίνακα της τετραγωνικής μορφής $x_2^2 - x_1 x_2 - x_3^2 + x_2 x_3$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3/2 & 0 \\ -3/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

Παρατήρηση: A θετικός $\Leftrightarrow q(\vec{x}) > 0$ για $\vec{x} \neq \vec{0}$

A αρνητικός $\Leftrightarrow q(\vec{x}) < 0$ για $\vec{x} \neq \vec{0}$

A μη αρνητικός $\Leftrightarrow q(\vec{x}) \geq 0$

A μη θετικός $\Leftrightarrow q(\vec{x}) \leq 0$

► A συμμετρικός $\xrightarrow[\text{Θεώρημα}]{\text{Φασματικό}}$ $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = P^t A P$
 $\uparrow$
 P ορθογώνιος

$$P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_n \end{pmatrix} P^t = A$$

(2)

$$q(x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n) = X^t A X = \overbrace{X^t P}^{} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \overbrace{P^t X}^{}$$

$$f_A: \mathbb{R}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times 1} \quad f_A(x) = AX$$

$$(f_A)_\gamma = (I)_\varepsilon^\gamma (f_A)_\varepsilon (I)_\gamma^\varepsilon \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{οι στήλες του } P \text{ είναι τα ιδιοδιάνυσμα} \\ \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n \end{array}$$

$\gamma = \{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n\}$ ιδιοδιανύσματα του A

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = P^t A P$$

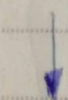
$$P^t = (I)_\varepsilon^\gamma \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

$\leftarrow$ επιλεγμένες στη βάση γ

$\leftarrow$ επιλεγμένες στη βάση ε

$$q(\vec{x}) = q(x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n) = q(x_1' \vec{y}_1 + \dots + x_n' \vec{y}_n)$$

$$= (x_1' \dots x_n') \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \dots + \lambda_n x_n'^2$$



Η διαδικασία αυτή γίνεται αναγνώριση στους κύριους άξονες

Θεώρημα κυρίων αξόνων: Έστω $q: E \rightarrow \mathbb{R}$ με $q(\vec{x}) = X^t A X$ για τετραγωνική μορφή τότε υπάρχει ΟΚΒ $\gamma = \{\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \dots, \vec{\gamma}_n\}$ του E τέτοια ώστε $q(\vec{x}) = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \dots + \lambda_n x_n'^2$ όπου $\vec{x} = x_1' \vec{\gamma}_1 + x_2' \vec{\gamma}_2 + \dots + x_n' \vec{\gamma}_n$ και $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές του πίνακα A . Τα διανύσματα $\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \dots, \vec{\gamma}_n$ ονομάζονται κύριοι άξονες της τετραγωνικής μορφής q .

► Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή $q(x, y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2$. Να βρούμε ο πίνακας A της q . Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή εως κύριους άξονες. Να βρούμε οι κύριοι άξονες.

$$q(x', y') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$$

Λύση:

$$i) A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$ii) \chi_A(x) = \begin{vmatrix} 5-x & -3 \\ -3 & 5-x \end{vmatrix} = (5-x)^2 - 9 = 25 + x^2 - 10x - 9 =$$

$$= x^2 - 10x + 16 = (x-2)(x-8)$$

Αναγωγή της q εως κύριους άξονες $q(x', y') = 2x'^2 + 8y'^2$

$$V(2) = \{ X \mid (A - 2I)X = 0 \} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$x - y = 0$$

$$x = t$$

$$y = t$$

$$V(8) = \{X / (A - 8I)X = 0\} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \left(\begin{array}{cc|c} -3 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{matrix} x = -t \\ y = t \end{matrix}$$

Κύριοι άξονες $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

→ Ποια η σχέση μεταξύ x', y' και x, y ;

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Άσκηση 28 / Επανάληπτικό Φύλλο

$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Σωπαίμε την τετραγωνική μορφή $Q(x, y, z) = 3x^2 + 2xy + 3y^2 - 2z^2$

Να βρεθεί ο πίνακας A της q

Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή σε κέρως άξονες

Να βρεθούν οι κύριοι άξονες της q

i) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

ii) $\chi_A = \begin{vmatrix} 3-x & 1 & 0 \\ 1 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & -2-x \end{vmatrix} = (-2-x) \begin{vmatrix} 3-x & 1 \\ 1 & 3-x \end{vmatrix} =$

$$= -(x+2) \left((3-x)^2 - 1 \right) = -(x+2)(2-x)(4-x)$$

Ισοποιεί σε 2, -2, 4

(5)

$$Q(x', y', z') = 2x'^2 - 2y'^2 + 4z'^2$$

$$V(-2) =$$

$$V(2) =$$

$$V(4) =$$

$$Q = X^t A X = (P^t X)^t \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^t X$$

Sylvester

$$\begin{matrix} QX \\ \det QX \end{matrix}$$

(ευτός ύψους)

7) Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ συμμετρικός και $A^3 = A^2$. Αξιζτε ότι $A^2 = A$.

Λύση:

$$\cancel{A^t A A A A A}$$

$$A^3 - A^2 = 0$$

$$x^3 - x^2 = 0$$

Ο πίνακας A ικανοποιεί το πολυώνυμο $x^3 - x^2$ άρα $m_A / x^3 - x^2 = x^2(x-1)$

$$m_A(x) \in \{ \cancel{x^2(x-1)}, (x-1)x, (x-1), \cancel{x}, x, \cancel{x^2} \}$$

↓
για να ικανοποιεί
κάθε
πίνακα

A συμμετρικός $\xrightarrow{\text{φαστατικό}}$ A διαγωνίσιμος $\Rightarrow m_A(x)$ γινόμενο 1^{ης} βαθμίου διαφορών με ταίρι τους (γι' αυτό αναιρέσω τις υπερμεινές $x^2(x-1)$ και x^2)

6

1^η περίπτωση: $m_A(x) = x(x-1) \Rightarrow A(A-I_n) = O_{n \times n}$
 $\Rightarrow A^2 = A$

2^η περίπτωση: $m_A(x) = X \Rightarrow A = O_{n \times n} \Rightarrow A^2 = A$

3^η περίπτωση: $m_A(x) = x-1 \Rightarrow A - I_n = O_{n \times n} \Rightarrow A = I_n \Rightarrow I_n^2 = I_n$

(15) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$T(x, y, z) = (2x+y+4z, 3x+3z, 4x+2y+z)$

Βρείτε τη συζυγή της T (προσχηματισμένη)

$T^* = ;$

Λύση: $\left(\begin{array}{l} \text{Ορισμός: } \langle T(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = \\ \langle (x_1, y_1, z_1), T^*(x_2, y_2, z_2) \rangle \end{array} \right)$

$\langle T(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = \langle (2x_1+y_1+4z_1, 3x_1+3z_1, 4x_1+2y_1+z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle$

$= (2x_1+y_1+4z_1)x_2 + (3x_1+3z_1)y_2 + (4x_1+2y_1+z_1)z_2 =$

$= 2x_1x_2 + y_1x_2 + 4z_1x_2 + 3x_1y_2 + 3z_1y_2 + 4x_1z_2 + 2y_1z_2 + z_1z_2 =$

$= x_1(2x_2+3y_2+4z_2) + y_1(x_2+2z_2) + z_1(4x_2+3y_2+z_2)$

Άρα $T^*(x, y, z) = (2x+3y+4z, x+2z, 4x+3y+z)$

2ος τρόπος $(T)^E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $T^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

11) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

α) Το 3 είναι ιδιοτιμή του $A \Rightarrow 15$ ιδιοτιμή του $2A^2 - 3I_n$

β) Έστω $A^2 = 4I$ (διαφορετικός πίνακας) $m_A(x) =$; $\chi_A(x) =$; A διαγωνίσιμος;

Λύση: α) Το 3 ιδιοτιμή του $A \Rightarrow$ υπάρχει $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ διαγωνίσιμος
 $X \neq 0$ τέτοια $\Rightarrow$

ώστε $AX = 3X$

$(2A^2 - 3I_n)X = \dots = 15X$

Το X είναι ένα διάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 3

$(2A^2 - 3I_n)X = 2A^2X - 3I_nX = 2A(AX) - 3X = 2A(3X) - 3X =$
 $6 \underbrace{AX}_{3X} - 3X = 6 \cdot 3X - 3X = 15X \quad \checkmark$

Άρα 15 ιδιοτιμή του $2A^2 - 3I_n$

β) $A^2 - 4I_n = 0$ Άρα ο A ικανοποιεί το πολυώνυμο $x^2 - 4$
 $\Rightarrow m_A(x) \mid x^2 - 4 = (x-2)(x+2) \Rightarrow m_A(x) \in \{x, x-2, x+2, (x-2)(x+2)\}$
 (οι $x-2$ και $x+2$ δεν ικανοποιούν κανένα πίνακα)

$$i) m_A(x) = x - 2 \Rightarrow A = 2I_n \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & 2 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(x) = (2 - x)^n = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{μεταβαλόμενος} \\ \text{βαίνει} \\ n}}{(-1)^n} (x - 2)^n$$

A διαγώνιος (όρα και διαγωγιμότητα)

$$ii) m_A(x) = x + 2 \Rightarrow A = -2I_n \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & & 0 \\ & -2 & \\ 0 & & -2 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(x) = (-1)^n (x + 2)^n$$

A διαγώνιος (όρα και διαγωγιμότητα)

iii) $m_A(x) = (x - 2)(x + 2)$ Ελάχιστο πολυώνυμο είναι γινόμενο τριωνομικών διαφορετικών μεταξύ τους. Άρα A διαγωγιμότητα

$$\chi_A(x) = (-1)^n (x - 2)^k (x + 2)^\lambda = (-1)^n (x - 2)^k (x + 2)^{n-k}$$

$k + \lambda = n \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad 1 \leq \lambda \leq n-1$

$$(19) \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} > 0;$$

Λύση: Εφαρμόζω το Sylvester B-θετικά ορισμένος $\xrightarrow{\text{Sylvester}} 4 > 0$ ✓

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} > 0 \quad \times \quad \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} > 0$$

i) $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ✓

ii) $B^t = B$ ✓

iii) Άρα B δεν είναι θετικός

(13) Γνωρίζω δύο ορθογώνιων $n \times n$ πινάκων είναι ορθογώνιος πίνακας

$$A, B \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ ορθογώνιοι,}$$

$$AA^t = I$$

$$BB^t = I$$

$$(AB)(AB)^t =$$

$$= I_n$$

AB ορθογώνιος

$$(AB)(AB)^t = A(BB^t)A^t = A I_n A^t = AA^t = I_n$$

Άρα AB ορθογώνιος